PROF. AMADOR MARTIN-PIZARRO
ÜBUNGEN: CHRISTOPH BRACKENHOFER

ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG
WINTERSEMESTER 2022/2023

Algebra und Zahlentheorie
Blatt 7
Abgabe: 13.12.2022, 14 Uhr
Gruppennummer angeben!

Aufgabe 1 (8 Punkte)**.**
Sei R ein kommutativer nicht-trivialer Ring derart, dass die Kollektion der Hauptideale von R linear geordnet bezüglich Inklusion ist.

(a) Zeige per Induktion, dass jedes endlich erzeugte Ideal von R ein Hauptideal ist.

(b) Zeige, dass die Kollektion von Idealen von R linear geordnet bezüglich Inklusion ist.

(c) Schließe daraus, dass R genau ein maximales Ideal besitzt.

(d) Sei nun $R = \mathbb{Z}_{(2)}$ aus der Aufgabe 4 im Blatt 6. Beschreibe explizit jedes Ideal von $\mathbb{Z}_{(2)}$.
Hinweis: Urbild unter dem Ringhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{(2)}$.

(e) Schließe daraus, dass $\mathbb{Z}_{(2)}$ ein Hauptidealring derart ist, dass die Kollektion von Idealen von $\mathbb{Z}_{(2)}$ linear geordnet durch Inklusion ist. Welches ist das maximale Ideal von $\mathbb{Z}_{(2)}$?

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.**

(a) Bestimme die Einheiten des nicht-kommutativen Ringes $R = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{Z})$.

(b) Ist die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ein irreduzibles Element von R?
Hinweis: Produktformel.

Aufgabe 3 (3 Punkte)**.**
Sei R der Integritätsbereich aller Polynome $P(T)$ mit reellen Koeffizienten, deren konstanter Term ein Element aus $\mathbb{Q}$ ist.

(a) Ist das Polynom $P(T) = T$ irreduzibel in R?

(b) Ist das von T erzeugte Ideal ein Primideal von R? Was ist der Unterschied zwischen den Ringen R und $\mathbb{R}[T]$?

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.**

(a) Ist das Polynom $P(T) = T^4 - 2T^3 + T + 1$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$?

(b) Ist das Polynom $P(T) = T^4 + T^3 + 2$ irreduzibel über dem Körper $\mathbb{F}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$?

DIE ÜBUNGSBLÄTTER KÖNNEN ZU ZWEIT EINGEREICHT WERDEN. ABGABE DER ÜBUNGSBLÄTTER IM FACH IM KELLER DES MATHEMATISCHEN INSTITUTS.